

低抖振非奇异终端滑模控制

张达科¹, 胡跃明², 胡战虎¹

(1. 广东省科学院 自动化工程研制中心, 广东 广州 510070)

(2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 为了解决常规滑模控制中产生的抖振, 同时利用终端滑模控制中快速收敛的优良特性, 针对一类二阶仿射非线性系统, 将非奇异终端滑动流形和终端到达律同时应用到滑模控制设计中, 得到低抖振非奇异终端滑模控制, 并证明其具有较强的鲁棒性.

关键词: 低抖振; 非奇异终端; 滑模控制

中图分类号: TP202

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2007) 03-0032-05

滑模控制是非线性控制的一种重要方法, 它具有设计简单和鲁棒性强的特点, 因此在非线性系统控制设计中得到广泛的关注. 常规的滑模控制系统设计是采用线性的超平面作为切换平面, 理论上只能渐近到达平衡点. 同时抖振是滑模控制的固有特性, 是限制滑模控制在实际控制中得到广泛应用的主要因素.

ZAK^[1] 在研究神经网络时首次提出终端吸引因子的概念, 并在神经网络研究中得以应用^[2-4], MAN^[5] 等在此基础上发展出终端滑模 (Terminal Sliding Mode TSM) 控制方法. 此后, 国内外在终端滑模控制方面做了很多研究和应用工作并取得了一些研究成果^[6-9]. 终端滑模控制的基本思想就是突破常规的线性滑动流形, 将非线性项引入到滑动流形设计中, 采用非线性超平面作为滑动流形, 使得系统进入滑模运动, 可以让滑动模态在有限的时间内到达平衡点. 打破了常规滑模控制中系统状态只能渐近收敛到平衡点的特点, 使得系统的动态性能得到改善. 和通常的滑模控制方法相比, 很好地提高了系统的收敛性. 然而也正是该优点, 导致了它的缺点, 即控制律中可能产生奇异的情况. 终端滑动流形的滑模控制产生奇异的情况, 是因为终端滑动流形中存在状态系统指数小于 1 而大于零的项, 在对终端滑动流形求导后, 产生系统状态指数为负数的项, 使得控制律中包含了系统状态负指数的项引起的.

为了充分利用终端滑模控制中快速收敛的优良特性, 而又能避免控制中产生奇异情况, 同时在削弱抖振的同时还能保持系统的鲁棒性, 本文拟针对一

类二阶仿射非线性系统, 将非奇异终端滑动流形和终端到达律同时应用到滑模控制设计中, 以得到低抖振非奇异终端滑模控制.

1 低抖振非奇异终端滑模控制设计

考虑二阶非线性系统 P :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x(t), t) + gu(t). \end{cases} \quad (1)$$

式中 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$. 设计控制 $u(t)$, 使状态 x 跟踪给定状态 $x_m = [x_{m1} \ x_{m2}]$. 首先令

$$e_1 = x_1 - x_{m1} \quad (2)$$

$$e_2 = e_1 = x_2 - x_{m2} = x_2 - x_{m2}. \quad (3)$$

同样, 按照一般的滑模控制设计步骤, 选择非奇异终端滑动流形为

$$S = \beta_1 e_2^{p/q} + e_1 = 0, \quad (4)$$

其中 $\beta_1 > 0$, $p, q = 2i+1$, i 为正整数, 并且 $p > q > 0$ 对式 (4) 求导得

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} \dot{e}_2 + \dot{e}_1 = \\ &= \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (x_2 - x_{m2}) + e_1 = \\ &= \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (f + gu - x_{m2}) + e_1. \end{aligned} \quad (5)$$

取终端到达律为

$$\dot{S} = -\beta_d S^{q_d/p_d}. \quad (6)$$

根据式 (5) 和 (6) 可求得低抖振非奇异终端滑模控制律为

$$u = g^{-1} \left[x_{m2} - f - \frac{q}{\beta_1 p} e_2^{2-(p/q)} - K_d S^{q_d/p_d} \right], \quad (7)$$

收稿日期: 2007-04-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60374016); 广东省自然科学基金资助项目 (020848)

作者简介: 张达科 (1973-), 男, 助理研究员, 博士, 主要研究方向为非线性系统的鲁棒控制及其应用

其中 $\beta_d = K_d \beta_1 \frac{q}{p} e_2^{(p-q)/q}$. 因为 p 和 q 都是奇数, 并且 $p > q > 0$ 所以 $e_2^{(p-q)/q} \geq 0$ 假定选取的 $K_d > 0$ 又 $\beta_1 > 0$ 所以 $\beta_d \geq 0$

取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} S^2. \quad (8)$$

对式 (8) 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{S} \dot{S} = & S \left[\beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (f + gu - x_{m2}) + e_1 \right] = \\ & - S \beta_d S^{q_d/p_d} = - \beta_d S^{(q_d + p_d)/p_d}. \end{aligned} \quad (9)$$

因为 p_d 和 q_d 为奇数, 并且有 $p_d > q_d > 0$ 所以 $S^{(q_d + p_d)/p_d} \geq 0$ 又 $\beta_d \geq 0$ 故有

$$\dot{V} = - \beta_d S^{(q_d + p_d)/p_d} \leq 0 \quad (10)$$

式 (10) 取等号只有两种情况

$$S = 0 \quad (11)$$

或者

$$\beta_d = K_d \beta_1 \frac{q}{p} e_2^{(p-q)/q} = 0 \quad (12)$$

对于第 1 种情况, 正是控制目的.

对于第 2 种情况, 也即是 $e_2 = e_1 = 0$ 将控制律 (7) 代入原系统 (1) 得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_{m2} - \frac{q}{\beta_1 p} e_2^{2-(p/q)} - K_d S^{q_d/p_d} \end{cases} \quad (13)$$

将 $e_2 = e_1 = 0$ 代入可得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ e_2 = -K_d e^{q_d/p_d} \end{cases} \quad (14)$$

如果 $e_2 = e_1 = 0$ 是保持的, 那么 $e_2 = 0$ e_1 为一常数, 由上式显然有 $e_1 = 0$ 即有 $S = 0$ 可见两种情况其实是一样的, 所以系统误差是渐近稳定的, 系统误差在有限时间内达到滑动流形, 即 $S = 0$

2 鲁棒性分析

如果设计的滑模控制律使得式 (10) 成立, 则根据 Lyapunov 稳定性理论可知, $S \rightarrow 0$ 也即是 $\beta_1 e_2^{p/q} + e_1 \rightarrow 0$ 或者 $S \rightarrow c$ 也即是 $\beta_1 e_2^{p/q} + e_1 \rightarrow c$ 故有 $e_2 = e_1$ 有界, $\beta_d = K_d \beta_1 \frac{q}{p} e_2^{(p-q)/q}$ 也有界, 令 $\beta_d \leq \beta_0$ 其中 β_0 为一正常数.

考虑单输入单输出 (SISO) 二阶不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = f(x) + \Delta f(x) + g(x)u + d(t). \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\Delta f(x)$ 和 $d(t)$ 代表系统参数不确定性和外部干扰, 并且有 $|\Delta f(x) + d(t)| \leq L$, L 为正常数或者正函数.

定理 对于不确定非线性系统 (1), 如果采用控制律

$$u = g^{-1} \left[x_{m2} - f - \frac{q}{\beta_1 p} e_2^{2-(p/q)} - K_d S^{q_d/p_d} \right], \quad (16)$$

那么系统状态将按终端到达律

$$\dot{S} = - \beta_d S^{q_d/p_d} \quad (17)$$

到达滑动模的领域内

$$\Delta = \left[\frac{L}{K_d} \right]^{\frac{p_d}{q_d}}. \quad (18)$$

证明 对终端滑动流形 (4) 求导得

$$\dot{S} = \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} e_2 + e_1 =$$

$$\beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (x_2 - x_{m2}) + e_1 =$$

$$\beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (f + \Delta f + gu + d - x_{m2}) + e_1. \quad (19)$$

取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} S^2. \quad (20)$$

对式 (20) 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{S} \dot{S} = & S \left[\beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (f + \Delta f + gu + d - x_{m2}) + e_1 \right] = \\ & S \left[\beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (f - x_{m2}) + e_1 \right] + \\ & S \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} gu + S \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (\Delta f + d). \end{aligned} \quad (21)$$

将控制律 (16) 代入式 (21) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - S K_d \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} S^{q_d/p_d} + \\ & S \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (\Delta f + d) = \\ & - \beta_d S^{\frac{p_d + q_d}{p_d}} + S \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (\Delta f + d) = \\ & - \left[\beta_d - \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (\Delta f + d) S^{\frac{q_d}{p_d}} \right] S^{\frac{p_d + q_d}{p_d}} = \\ & - \alpha V \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha = & \beta_d - \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} (\Delta f + d) S^{-\frac{q_d}{p_d}} \leq \\ & K_d \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} - \beta_1 L \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} S^{-\frac{q_d}{p_d}} \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

也即是

$$K_d \beta_1 \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} - \beta_1 L \frac{p}{q} e_2^{(p-q)/q} S^{-\frac{q_d}{p_d}} \leq 0 \quad (24)$$

因为 $\beta_1, p, q > 0$, $e_2^{(p-q)/q} \geq 0$, 所以式 (24) 取等号只有两种情况 $e_2 = 0$ 或者

$$K_d = LS^{-\frac{q_d}{p_d}} \quad (25)$$

首先考虑 $e_2 \neq 0$ 的情况. 令

$$K_d - LS^{-\frac{q_d}{p_d}} < 0 \quad (26)$$

或者等效于

$$|S| > \left(\frac{L}{K_d} \right)^{\frac{p_d}{q_d}}. \quad (27)$$

则有

$$\alpha > 0 \quad (28)$$

根据式 (22) 可知, 在边界层

$$\Delta = \left(\frac{L}{K_d} \right)^{\frac{p_d}{q_d}} \quad (29)$$

外, 系统误差是渐近稳定的, 可以在有限时间到达边界层.

考虑 $e_2 = 0$ 的情况. 将控制律代回原来系统方程 (1) 得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_{m2} - \frac{q}{\beta_1 p} e_2^{2-(p/q)} - K_d S^{q_d/p_d} \phi + \Delta f(x) + d(t) \end{cases}, \quad (30)$$

整理得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{e}_2 = \frac{q}{\beta_1 p} e_2^{2-(p/q)} + K_d S^{q_d/p_d} \phi - (\Delta f(x) + d(t)). \end{cases} \quad (31)$$

因为 $e_2 = 0$ 故式 (31) 简化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{e}_2 = K_d e_1^{q_d/p_d} - (\Delta f(x) + d(t)). \end{cases} \quad (32)$$

如果 $e_2 = e_1 = 0$ 是保持的, 那么 $e_2 = 0$, e_1 为一常数. 考察式 (32), 如果不存在系统不确定性和外部干扰的话, 即 $\Delta f(x) + d(t) = 0$, 那么可推得 $e_1 = 0$. 此时系统收敛到平衡点. 由于系统存在不确定性和外部干扰, $\Delta f(x) + d(t)$ 是变化的, 所以导致 e_1 也是变化的, 所以其导数 $e_2 = e_1$ 也是变化的, 可见 $e_2 = e_1 = 0$ 只能是暂时的, 是不稳定的. 因此可以根据 $e_2 \neq 0$ 情况得出同样的结论.

证毕.

观察式 (29), 在系统的不确定性和干扰有界的情况下, 调节控制律中的 K_d 可以控制边界层的厚度, 从而控制系统误差的精度. 下面给出边界层和系

统误差之间的关系.

取 Lyapunov 函数

$$V = |e_1|, \quad (33)$$

又

$$S = \beta_1 e_2^{p/q} + e_1. \quad (34)$$

对式 (33) 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_2 \operatorname{sgn}(e_1) = \\ &= \frac{1}{\beta_1^{q/p}} (S - e_1)^{q/p} \operatorname{sgn}(e_1) \leq \\ &= -\frac{1}{\beta_1^{q/p}} (|e_1| - |S|)^{q/p}. \end{aligned} \quad (35)$$

显然 e_1 将收敛到边界层 Δ

$$|e_2| = \left| \frac{1}{\beta_1} (S - e_1) \right|^{q/p} \leq \left[\left| \frac{S}{\beta_1} \right| \right]^{q/p} + \left[\left| \frac{e_1}{\beta_1} \right| \right]^{q/p}. \quad (36)$$

因为 e_1 和 S 都将收敛到边界层 Δ , 故有当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$|e_2| \leq \left[\left| \frac{S}{\beta_1} \right| + \left| \frac{e_1}{\beta_1} \right| \right]^{q/p} \leq \left(\frac{2\Delta}{\beta_1} \right)^{q/p}. \quad (37)$$

因此, 系统的误差精度可以通过调节边界层 Δ 来进行控制. 由此可见, 控制律具有较强的鲁棒性.

3 仿真

为了验证上述低抖振非奇异终端滑模控制的有效性, 下面对回滞系统控制进行仿真试验. 考虑如下回滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + u \\ u = H(v(t)). \end{cases} \quad (38)$$

回滞特性方程为

$$u = |v| (3v - u) + 0.3v, \quad (39)$$

给定状态为

$$\mathbf{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}) = (\sin(t), \cos(t)), \quad (40)$$

给定误差稳定跟踪精度要求为

$$|e_1| \leq 0.04, |e_2| \leq 0.6 \quad (41)$$

根据式 (35) 和 (37) 选择参数为: $\Delta = 0.04$, $\beta_1 = 0.2$

$$p = p_d = 5, q = q_d = 3, K_d = 20$$

可获得控制律为

$$v = \frac{1}{3} (-\sin(t) - x_2 - 3e_2^{1/3} - 20S^{3/5}). \quad (42)$$

通过 Matlab 6.5 软件进行仿真, 仿真结果如图 1 所示. 分别调整 $K_d = 50$ 和 $q_d/p_d = 3/7$, 仿真结果分别如图 2 和 3

观察仿真结果, 调整了 K_d , 使得 $K_d = 50$ 其他参数都一样. 当达到律的增益系数 K_d 变大时, 跟踪误

差变得较小, 跟踪效果较好, 控制输入产生一定程度的低频抖振, 不过仍然没有奇异情况出现. 调整了 p_d 使得 $p_d = 7$, 其他参数都一样. 当达到律的指数系数变小时, 跟踪误差变得较小, 跟踪效果较好, 控制输入产生一定程度的低频抖振, 不过仍然没有奇异情况出现.

由以上仿真结果可见, 上述提出的低抖振非奇异终端滑模控制可以有效地对回滞系统进行控制, 大大削弱了回滞特性, 同时可以有效地削弱滑模控制中的抖振现象, 并且输入不会出现无穷大的奇异现象. 可以通过调节 K_d 、 p_d 和 q_d 来控制滑模控制中的抖振程度和跟踪误差精度.

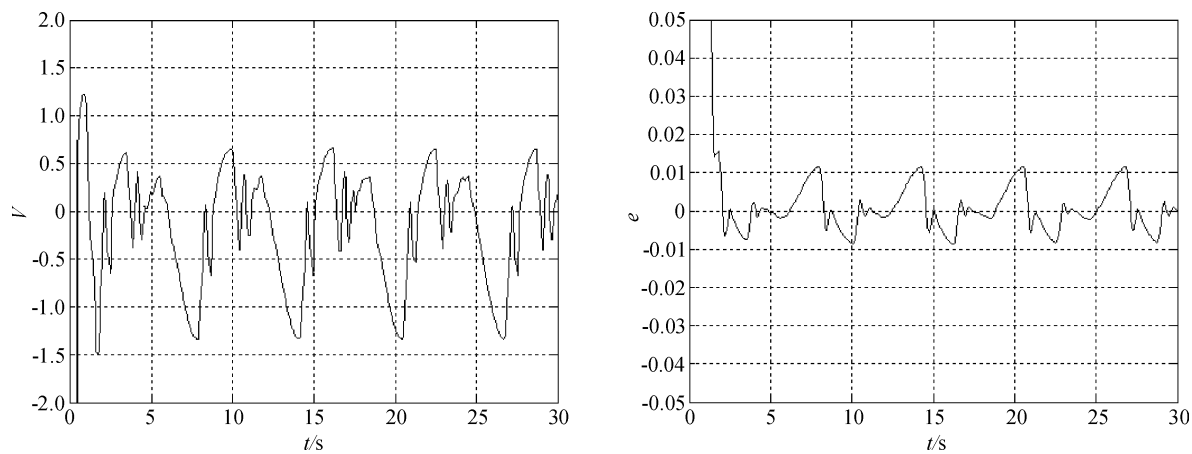


图 1 $K_d = 20$ $q_d/p_d = 3/5$ 时输入和误差曲线

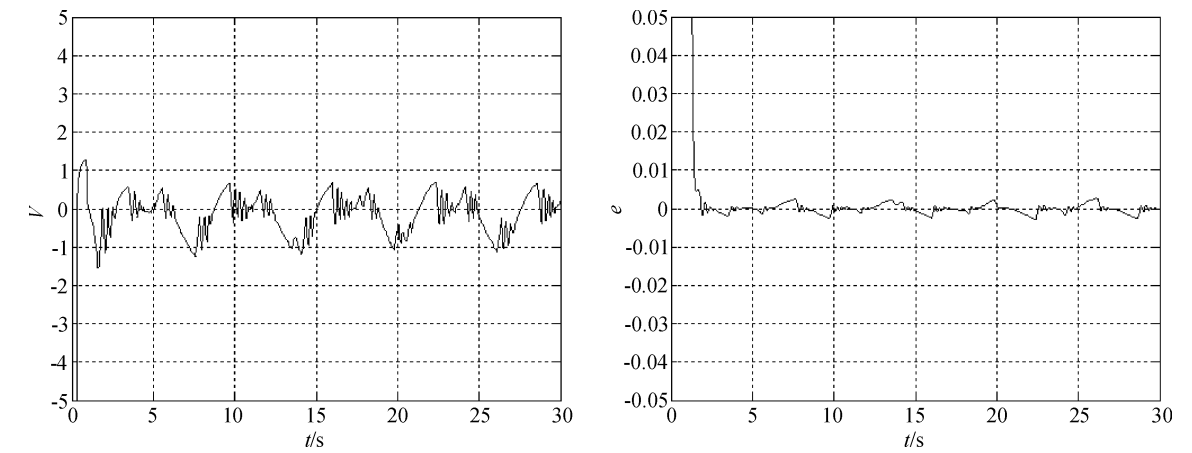


图 2 $K_d = 50$ $q_d/p_d = 3/5$ 时输入和误差曲线

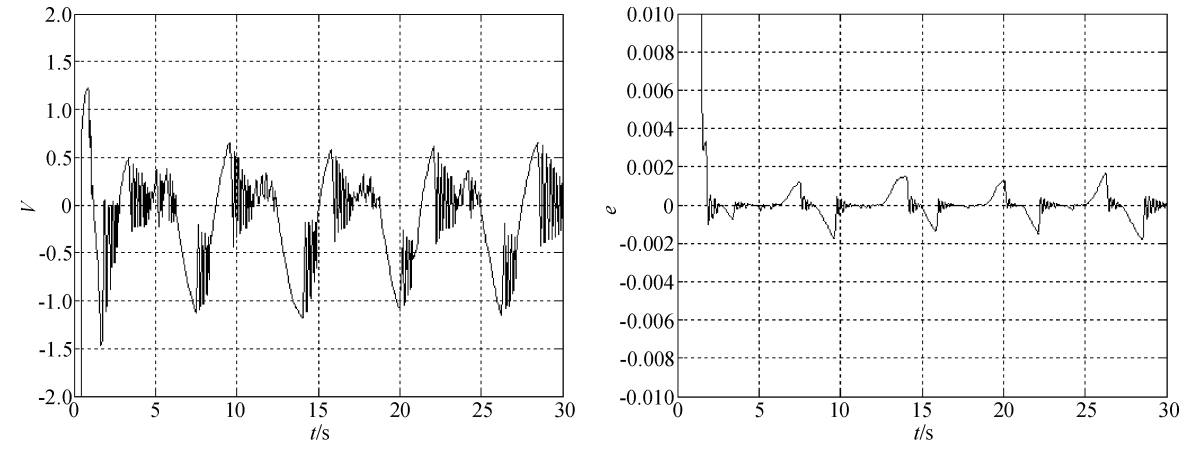


图 3 $K_d = 20$ $q_d/p_d = 3/7$ 时输入和误差曲线

4 结论

本文给出了低抖振非奇异终端滑模的控制设计,充分体现了终端滑模控制的快速的收敛特性,具有较强的鲁棒性,同时避免了终端滑动流形的滑模控制产生奇异的情况,也避免了一般滑模控制设计出现的带绝对值控制律所产生的抖振.

参考文献:

- [1] ZAK M. Terminal attractors in neural networks[J]. Neural Networks, 1989(2): 259-274.
- [2] WANG S, HSU C H. Terminal attractor learning algorithms for backpropation neural networks[C]// International Joint Conference on Neural Networks Singapore: IEEE Press, 1991: 183-189.
- [3] BIANCHINI M, FANELLI S, GORINI M, et al Terminal attractor algorithms: a critical analysis[J]. Neurocomputing, 1997(15): 3-13.

- [4] ZAK M. Terminal attractors for addressable memory in neural networks[J]. Physics Letters A, 1998, 133(1/2): 18-22.
- [5] MAN ZH, PALINSKI A P, WU H R, et al A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. IEEE Trans[J]. On Automatic Control, 1994, 39(12): 2464-2468.
- [6] MAN ZH, YU XH. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, 1997, 44(11): 1065-1070.
- [7] 冯勇, 鲍晟, 余星火. 非奇异终端滑模控制的设计方法[J]. 控制与决策, 2002, 17(2): 194-198.
- [8] FENG Y, YU XH, MAN ZH. Adaptive fast terminal sliding mode tracking control of robotic manipulator[C]// Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control USA Florida Orlando, 2001: 4021-4026.
- [9] YU XH, MAN ZH. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(2): 261-264.

Sliding Mode Control of Low Chattering Non-singular Terminal

ZHANG Da-ke¹, HU Yue-min², HU Zhan-hu¹

(1. Automation Engineering R&M Center, Guangdong Academy of Sciences, Guangzhou 510070, China;

2. College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract In order to overcome the chattering in normal sliding mode control (SMC), and take advantage of the good characteristics of quick convergence in the terminal SMC, non-singular terminal sliding and terminal reaching law are applied to the design of sliding mode control, which is aimed at second-order affine nonlinear systems. Low chattering and non-singular terminal SMC is reached and proved to be good robustness.

Key words low chattering non-singular terminal sliding mode control